# REAL ACADEMIA DE DOCTORES

**Monografía 1**

# ELEMENTOS BÁSICOS EN EL ANÁLISIS DE DATOS Y SU ADECUACIÓN A UNA TABLA DISYUNTIVA COMPLETA

FRANCISCO JAVIER DÍAZ-LLANOS Y SAINZ-CALLEJA

Madrid
Abril 1999

Número de Registro de la Propiedad
Intelectual de Madrid

83.385

## INDICE

*Págs.*

# 1. ELEMENTOS BASICOS EN EL ANALISIS DE DATOS

## 1.1. Tabla de correspondencia: noción de perfil

### *1.1.1. La tabla de datos*

La tabla de datos pone en correspondencia a dos conjuntos que indicaremos por $I$ y $J$

$$k_{IJ} = \{k(i, j) \mid i \in I, j \in J\}$$

| $I \backslash J$ | $j$ |
|---|---|
| $i$ | $\cdot$<br>$\cdot$<br>.............$k(i, j)$.............<br>$\cdot$<br>$\cdot$ |

La tabla original tiene Card $I$ filas y Card $J$ columnas. Card es la abreviatura de: cardinal;

"Card $I$" se lee: cardinal de $I$.

La tabla se indica por $I \times J$ o $k_{IJ}$

### *1.1.2. Los efectivos marginales*

| $J$ / $I$ | $j$ | Columna marginal |
|---|---|---|
| $i$ | ..........$k(i, j)$.......... | $k(i)$ |
| Fila marginal | $k(j)$ | $K$ |

Efectivo marginal de las filas: $k(i)$, donde $k(i) = \sum_{j \in J} k(i, j)$

Efectivo marginal de las columnas: $k(j)$, donde $k(j) = \sum_{i \in I} k(i, j)$

### *1.1.3. Masa de una fila o de una columna de la tabla de datos*

La masa de $i$ es el cociente entre el total de la fila $i$ por el total general:

*La masa de* $i : f_i = \dfrac{k(i)}{k}$

La masa de $j$ es el cociente del total de la columna $j$ por el total general:

*La masa de* $j : f_j = \dfrac{k(j)}{k}$

### *1.1.4. Noción de perfil*

**Perfil de $i$ sobre $J$ : $f_J^i$.**

La fila $i$ será caracterizada por el total $k(i)$ y su perfil $f_J^i = \left\{ \cdots \dfrac{k(i,j)}{k(i)} \cdots \right\}$ de total 1, obtenido dividiendo cada término $k(i, j)$ de la fila $i$, por el total $k(i)$.

Indicaremos por $f_J^i = \left\{ f_j^i \,|\, j \in J \right\}$, el conjunto de todos los $f_j^i$ correspondiente a todos los elementos de $J$.

**Perfil de $j$ sobre $I$ : $f_J^i$.**

La columna $j$ será caracterizada por su total $k(j)$ y su perfil $f_I^j = \left\{ \cdots \dfrac{k(i, j)}{k(j)} \cdots \right\}$ de total 1, obtenido dividiendo cada término $k(i, j)$ de la columna $j$, por el total $k(j)$.

Indicaremos por $f_I^j = \{f_i^j \mid i \in I\}$ el conjunto de todos los $f_i^j$ correspondiente a todos los elementos de $I$.

**Perfil de la columna marginal:** $f_J$

Indicaremos por $f_J = \{f_j \mid j \in J\}$ el conjunto de los $f_j = \frac{k(j)}{k}$ correspondiente a todos los elementos de $J$.

**Perfil de las filas marginales:** $f_I$

Indicaremos por $f_I = \{f_i \mid i \in I\}$ el conjunto de los $f_i = \frac{k(i)}{k}$ correspondiente a todos los elementos de $I$.

## 1.2. Representación espacial de los conjuntos en correspondencias: las nubes *N(I)* y *N(J)*

### *1.2.1. Representación espacial de los conjuntos I y J*

$I$ será representado por el espacio de los perfiles sobre $J$.

$J$ será representado por el espacio de los perfiles sobre $I$.

### *1.2.2. El espacio de los perfiles sobre I*

Un punto de este espacio es un perfil sobre $I$; es decir, un conjunto de números positivos o nulos indicados por $I$ y de total 1. $\pi_I = \{\pi_i \mid i \in I\}$, $\pi_i$ número $\Re$ positivo o nulo; $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$. *Los números* $\pi_i$ *están indicados por I:* a todo elemento $i$ de $I$ corresponde un término $\pi_i$ y sólo uno. Un perfil $\pi_i$ esta definido por tantos parámetros como elementos tiene $I$ (Card $I$). La suma de dichos parámetros es 1.

### *1.2.3. El espacio de los perfiles sobre J*

Un punto de este espacio es un perfil sobre $J$, es decir, un conjunto de números positivos o nulos indicados por $J$ y de total 1. $\pi_J = \{\pi_j \mid j \in J\}$, $\pi_j$ numero $\Re$ positivo o nulo $\sum_{j \in J} \pi_j = 1$. *Los números* $\pi_j$ *están indicados por J:*

a todo elemento $j$ perteneciente a $J$, le corresponde un término o perfil $\pi_j$ y sólo uno. Un perfil $\pi_j$ está definido por tantos parámetros como elementos tiene $J$ *(Card J)*. La suma de dichos parámetros es igual a 1.

### *1.2.4. La nube N(I)*

En el espacio de los perfiles sobre $J$, cada fila i de la tabla original está representada por un perfil $f_J^i = \left\{ \frac{k(i,j)}{k(i)} | j \in J \right\}$ al cual se le asocia la masa de $i$: $f_i = \frac{k(i)}{k}$ ; el conjunto de los perfiles de las diversas filas $i$, cada una provista de la masa de la fila que representa, constituye la nube *N(I)*.

$N(I) = \left\{ \left(f_J^i, f_i\right) | i \in I \right\}$; un elemento de la nube *N(I)* es una pareja formada por un perfil fila y por la masa de esta fila.

### *1.2.5. La nube N(J)*

En el espacio de los perfiles sobre $I$, cada columna $j$ de la tabla original esta representada por un perfil $f_I^j = \left\{ \frac{k(i,j)}{k(j)} | i \in I \right\}$ al cual se le asocia la masa $j$: $f_j = \frac{k(j)}{k}$ ; el conjunto de los perfiles de las diversas columnas $j$, cada una provista de la masa de la columna que representa, constituye la nube *N(J)*.

$N(J) = \left\{ \left(f_I^i, f_i\right) | j \in J \right\}$; un elemento de la nube *N(J)* es una pareja formada por un perfil columna y por la masa de esta columna

### *1.2.6. Centro de gravedad del espacio de perfiles sobre I a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_i$*

El centro de gravedad del espacio de perfiles sobre $I$ a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_i$, es un perfil sobre $J$ que indicaremos provisionalmente $g_J$. Su j-ésima coordenada $g_j$ es la media ponderada de las j-ésimas coordenadas del espacio de perfiles sobre $I$, a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_i$.

Partiendo de la definición del centro de gravedad del espacio de perfiles sobre $I$, a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_i$, $g_j = \frac{\sum_{i\in I} f_i f_j^i}{\sum_{i\in I} f_i}$ y, teniendo en cuenta los siguientes resultados:

$$\sum_{i\in I} f_i = \sum_{i\in I} \frac{k(i)}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i\in I} k(i) = \frac{k}{k} = 1;$$

$$\sum_{i\in I} f_i f_j^i = \sum_{i\in I} \frac{k(i)}{k} \frac{k(i, j)}{k(i)} = \sum_{i\in I} \frac{k(i, j)}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i\in I} k(i, j) = \frac{k(j)}{k}$$

concluímos que: $g_j = \frac{k(j)}{k} = f_j$.

Así pues, el centro de gravedad del espacio de perfiles sobre $I$, a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_i$, es $f_J$.

### *1.2.7. Centro de gravedad del espacio de perfiles sobre J A cada uno de los cuales se le asocia la mada $f_j$*

Actuando de la misma manera que en el apartado anterior llegamos a la conclusión de que, $g_i = \frac{k(i)}{k} = f_i$.

Así pues, el centro de gravedad del espacio de perfiles sobre $J$, a cada uno de los cuales se le asocia la masa $f_j$, es: $f_I$.

## 1.3. Tablas de datos asociadas a un cuestionario

### *1.3.1. Construcción de tablas de datos*

#### ***1.3.1.1. La tabla $k_{IJ}$ bajo la forma disyuntiva completa***

Un cuestionario está formado por un conjunto $Q$ de cuestiones. Cada una de ellas admite un conjunto $J_q$ de modalidades de respuesta que indicaremos por la expresión: $J = \cup \{J_q | q \in Q\}$ el conjunto de las modalidades de respuesta a todas las cuestiones de $Q$.

El cuestionario esta sometido a un conjunto $I$ de $N$ sujetos (Card $I = N$): suponemos que todo sujeto $i$ adopta para cada cuestión $q$ una modalidad de respuesta, y solo una, en el conjunto $J_q$. Las respuestas se encuentran recogidas en una tabla $k_{IJ}$ siguiendo el código:

$k(i, j) = 1$ si el individuo $i$ ha adoptado la modalidad $j$.
$k(i, j) = 0$ si el individuo $i$ no ha adoptado la modalidad $j$.

Teniendo en cuenta la hipótesis hecha, hay en cada fila $i$ una cifra designada como: "1" y solo una, por grupo $J_q$ de columnas. El total $k(i)$ de cada fila es igual a *Card Q;* y el total general $k$ es igual a *Card I* $\times$ *Card Q*.

### *1.3.1.2. La tabla de Burt: $k'_{JJ}$*

En la **tabla de Burt,** que es simétrica, inscribimos en la intersección de la fila j de la columna $j'$ el número $k'(j, j')$ de individuos, habiendo simultáneamente adoptado las modalidades $j$ y $j'$.

Matemáticamente lo que acabamos de decir lo podemos expresar de tres formas:

$$k'(j, j') = Card\,\{i \mid i \in I; k(i, j) = k(i, j') = 1\}$$

$$k'(j, j') = \sum_{i \in I} k(i, j)\, k(i, j')$$

$$k'(j, j') = \left[ \sum_{i \in I} \frac{k(i, j) k(i, j')}{k(i)} \right] Card\,Q$$

Se han realizado particiones de modo que las columnas de la **tabla de Burt**, están organizadas por grupos $J_q$ (cada uno referente a una cuestión). La **tabla de Burt** esta dividida en bloques $J_q \times J_{q'}$. De manera particular, todo bloque esta reducido a su diagonal.

En concreto a $k'_{JJ}$ y a $k_{IJ}$ se le asocia una misma ley marginal: $f_J$

### *1.3.1.3. La tabla $f_I^J$ de los perfijes de las columnas* **de** $k_{IJ}$

Esta tabla se construirá colocando en la columna $j$ de la tabla $f_I^J$ el perfil de la columna $j$ de la **tabla disyuntiva completa:** $k_{IJ}$

#### 1.3.1.4. *La tabla de la transición $t_J^J$ asociada a una tabla de Burt: $k'_{JJ}$*

Esta tabla no es simétrica y se construirá colocando en la columna $j$ de la tabla $t_J^J$, el perfil de la columna $j$ de la **tabla de Burt:** $k'_{JJ}$

#### *1.3.1.5. Ejercicio elemental de construcción de tablas de datos*

A partir de tres variables cualitativas a distinto número de modalidades

| **Variables cualitativas** | **Número de modalidades** | **Modalidades** |
|---|---|---|
| ¿Dónde compra normalmente el vino? | 2 CT<br>CS | — En tienda especializada > 1<br>— Supermercado > 2 |
| ¿Qué clase de vino prefiere Ud.? | 3 PT<br>PR<br>PB | — Tinto > 1<br>— Rosado > 2<br>— Blanco > 3 |
| ¿Qué tipo de sabor prefiere Ud. en el vino? | 4 SJ<br>SV<br>SE<br>SC | — Joven > 1<br>— Viejo > 2<br>— Semiseco > 3<br>— Seco > 4 |

y cuatro individuos identificados por la siguiente manera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **I01** | **CS** | **PB** | **SV** |
| **I02** | **CT** | **PR** | **SJ** |
| **I03** | **CS** | **PR** | **SC** |
| **I04** | **CS** | **PT** | **SE** |

construir las siguientes tablas de datos:

1. **La tabla numérica**
2. **La tabla $k_{IJ}$ bajo la forma disyuntiva completa.**
3. **La tabla $f_I^J$ de los perfiles de las $k_{IJ}$.**
4. **La tabla de Burt: $k'_{JJ}$**
5. **La tabla de transición $t_J^J$ asociada a una tabla de Burt.**

## 1. Tabla numérica

| | Tabla Numérica | | |
|---|---|---|---|
| | **Compra** | **Prefiere** | **Sabor** |
| I01 | 2 | 3 | 2 |
| I02 | 1 | 2 | 1 |
| I03 | 2 | 2 | 4 |
| I04 | 2 | 1 | 3 |

## 2. Tabla $k_{IJ}$ bajo la forma disyuntiva completa

| | Tabla disyuntiva completa: $k_{IJ}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Compra** | | **Prefiere** | | | **Sabor** | | | |
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| I01 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I02 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I03 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I04 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## 3. Tabla $f_I^J$ de los perfiles de las columnas de $k_{IJ}$

| | Tabla $f_I^J$ disyuntiva completa: $k_{IJ}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Compra** | | **Prefiere** | | | **Sabor** | | | |
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| I01 | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I02 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I03 | 0 | 1/3 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I04 | 0 | 1/3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## 4. Tabla de Burt: $k'_{JJ}$

| | Tabla de Burt: $k'_{JJ}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| CS | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| CT | 0 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| PT | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| PR | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| PB | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| SJ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| SV | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| SE | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| SC | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

## 5. Tabla de la transición $t_J^J$ asociada a una tabla de Burt: $k'_{JJ}$

| | Tabla de la transición $t_J^J$ asociada a una tabla de Burt: $k'_{JJ}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| CS | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| CT | 0 | 1 | 1 | 1/2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| PT | 0 | 1/3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| PR | 1 | 1/3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| PB | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| SJ | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| SV | 0 | 1/3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| SE | 0 | 1/3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| SC | 0 | 1/3 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

### *1.3.2. Operaciones elementales en una tabla disyuntiva completa*

#### ***1.3.2.1. Deducir las expresiones que adoptan $k(i)$, $k(j)$, $k$, $f_i$ y $f_j$ en función de Card Q, N y $P_j$, N y Card Q, N y $P_j$ y Card Q respectivamente***

A partir de una Tabla Disyuntiva Completa:

1. **Expresar** $k(i)$ **en función de** *Card Q*.
2. **Expresar** $k(j)$ **en función de** $N$ y $P_j$.
3. **Expresar** $k$ **en función de** $N$ y *Card Q*.
4. **Expresar** $f_i$ **en función de** $N$.
5. **Expresar** $f_j$ **en función de** $P_j$ y *Card Q*.

## 1. Expresar $k(i)$ en función de $Card\ Q$

Partiendo de la definición de $k(i)$, $k(i)=\sum_{j\in J} k(i,j)$ y teniendo en cuenta que, la tabla de datos es una **tabla disyuntiva completa**, llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión, $k(i) = Card\ Q$.

## 2. Expresar $k(j)$ en función de $N$ y $P_j$

Partiendo de la definición de $k(j)$, $k(j)=\sum_{i\in I} k(i,j)$ y, dado que, la tabla de datos es una **tabla disyuntiva completa**, llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión, $k(j) = N\ P_j$.

## 3. Expresar $k$ en función de $N$ y $Card\ Q$

Partiendo de la definición de $k$, $k=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} k(i,j)$ y teniendo en cuenta que, la tabla de datos es una **tabla disyuntiva completa**, llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión:

$$k = N\ Card\ Q.$$

## 4. Expresar $f_i$ en función de $N$

Partiendo de la definición de $f_i$, $f_i=\frac{k(i)}{k}$ y, sustituyendo los siguientes resultados, $k(i)= Card\ Q$ y $k = N\ Card\ Q$ en la fórmula de $f_i$, tenemos que, $f_i=\frac{k(i)}{k}=\frac{Card\ Q}{N\ Card\ Q}=\frac{1}{N}$.

Por lo tanto, $f_i=\frac{1}{N}$.

## 5. Expresar $f_j$ en función de $P_j$ y $Card\ Q$

Partiendo de la definición de $f_j$, y sustituyendo los siguientes resultados, $k(j) =N\ P_j$, $k = N\ Card\ Q$ en la fórmula de $f_j$, tenemos que,

$$f_j=\frac{k(j)}{k}=\frac{N\ P_j}{N\ Card\ Q}=\frac{P_j}{Card\ Q}.$$

Por lo tanto, $f_j = \frac{P_j}{Card\ Q}$ .

### *1.3.2.2. Ejercicio elemental en una tabla disyuntiva completa*

A partir de la **tabla distuntiva completa** que mostramos a continuación:

| | **Tabla disyuntiva completa: $k_{IJ}$** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Compra** | | **Prefiere** | | | **Sabor** | | | |
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| I01 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I02 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I03 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I04 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Calcular:

1. **Los efectivos marginales de las filas:** $k(i)$
2. **Los efectivos marginales de las columnas:** $k(j)$
3. **El efectivo total:** $k$
4. **Las frecuencias marginales de las filas:** $f_i$
5. **Las frecuencias marginales de las columnas:** $f_j$

## RESOLUCION

### 1. Los efectivos marginales de las filas: $k(i)$

Partiendo de la fórmula: $k(i) = Card\ Q$ tenemos que:

$$k(I01)=3,\ k(I02)=3,\ k(I03)=3,\ k(I04) = 3$$

### 2. Los efectivos marginales de las columnas: $k(j)$

Partiendo de la fórmula: $k(j) = N\ P_j$ tenemos que:

$$k(CT) = 4\frac{1}{4} = 1 \qquad k(CS) = 4\frac{3}{4} = 3 \qquad k(PT) = 4\frac{1}{4} = 1$$

$$k(PR) = 4\frac{2}{4} = 2 \qquad k(PB) = 4\frac{1}{4} = 1 \qquad k(SJ) = 4\frac{1}{4} = 1$$

$$k(SV) = 4\frac{1}{4} = 1 \qquad k(SE) = 4\frac{1}{4} = 1 \qquad k(SC) = 4\frac{1}{4} = 1$$

### 3. El efectivo total: $k$

Partiendo de la fórmula: $k = N\ Card\ Q$, tenemos que, $k = (4)\ (3) = 12$

### 4. Las frecuencias marginales de las filas: $f_i$

Partiendo de la fórmula, $f_i = \frac{1}{N}$ tenemos que,

$$f_{I01} - \frac{1}{4} \quad f_{I02} = \frac{1}{4} \quad f_{I03} = \frac{1}{4} \quad f_{I04}\,\frac{1}{4}$$

### 5. Las frecuencias marginales de las columnas: $f_j$

Partiendo de la fórmula, $f_j = \frac{P_j}{Card\ Q}$ tenemos que:

$$f_{CT} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12} \qquad f_{CS} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{3}{12} \qquad f_{PT} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$

$$f_{PR} = \frac{\frac{2}{4}}{3} = \frac{2}{12} \qquad f_{PB} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12} \qquad f_{SJ} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$

$$f_{SV} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12} \qquad f_{SE} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12} \qquad f_{SC} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$

## 2. DISTANCIAS Y PRODUCTOS ESCALARES EN LA NUBE DE LAS MODALIDADES DE RESPUESTA A UN CUESTIONARIO

### 2.1. Enunciado de un problema

Un cuestionario esta formado por un conjunto $Q$ de cuestiones, las cuales cada una de ellas admite un conjunto $J_q$ de modalidades de respuesta.

Indicaremos por: $J = \cup \left\{ J_q \,|q \in Q \right\}$ el conjunto de modalidades de respuesta a todas las cuestiones de $Q$.

El cuestionario esta sometido a un conjunto $I$ de $N$ sujetos *(Card I = N)*. Las respuestas están recogidas en una tabla $k_{IJ}$ siguiendo el código:

$k(i, j) = 1$ si el individuo i ha adoptado la modalidad $j$
$k(i,j) = 0$ si el individuo i no ha adoptado la modalidad $j$

Puesto que todo sujeto suministra a cada cuestión $q$ una respuesta y sólo una, hay en cada fila *i,* una cifra 1 y solo por grupo $J_q$ de columnas.

Suponiendo que el número de sujetos que han adoptado la modalidad $j$ es $N P_j$ (la cifra 1 se encuntra $N P_j$ veces en la columna $j$; y la cifra 0 se encuentra $N (1 - P_j)$ veces)

**1.1. Expresar en función de $P_j$ el cuadrado de la distancia, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I$, entre el perfil $f_I^j$ de la fila $i$ y el perfil medio $f_I$**

$$\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left( f_i^j - f_i \right)^2}{f_i}$$

**1.2. Expresar en función de $P_j$ y de *Card Q* la contribución absoluta de $j$ a la inercia de la nube *N(J)***

$$f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{f_j \left(f_i^j - f_i\right)^2}{f_i}$$

**1.3. Expresar en función de Card $J_q$ y de *Card Q* la suma de las contribuciones de las modalidades de la cuestión $q$ a la inercia de la nube** *N(J)*

$$\sum_{j \in J_q} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{j \in J_q} \sum_{i \in I} \frac{f_j \left(f_i^j - f_i\right)^2}{f_i}$$

**1.4. Expresar en función de** ***Card J*** **y** ***Card Q*** **el valor de la inercia total de la nube** *N(J)*

$$\sum_{q \in Q} \frac{\left(Card\, J_q - 1\right)}{Card\, Q}$$

**1.5. Expresar en función de la inercia total de la nube** *N(I)* **y la nube** *N(J)* **el cuadrado de la distancia, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I \times f_J$, entre $f_{IJ}$ y $f_I \times f_J$**

$$\left\| f_{IJ} - f_I \times f_I \right\|_{f_{IJ}}^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{\left(f_{ij} - f_i f_j\right)^2}{f_i f_i}$$

**1.6. Sean $j$ y $j'$ dos modalidades de respuesta $j \in J$ y $j' \in J$**

Indicaremos por:

$N\,P_j$ el número de sujetos que adoptan la modalidad $j$.

$N\,P_{j'}$ el número de sujetos que adoptan la modalidad $j'$.

$N\,P_{jj'}$ el número de sujetos que adoptan simultáneamente las dos modalidades.

**Expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$, el cuadrado de la distancia, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I$, entre $f_I^j$ y $f_I^{j'}$**

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i^{j'}\right)^2}{f_i}$$

**1.7. Expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$, el producto escalar, según la métrica del $\mathcal{X}^2$ de centro $f_I$, entre:**

$$< \left(f_I^i - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)\left(f_i^{j'} - f_i\right)}{f_i}$$

**1.8. Expresar en función de $\left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2$, $\left\|f_I^{j'} - f_I\right\|_{f_I}^2$ y $< \left(f_I^j - f_I\right)\left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$ la distancia al cuadrado, según la métrica del $\mathcal{X}^2$ de centro $f_I$, entre el perfil $f_I^j$ de la columna $j$ y el perfil $f_I^{j'}$ de la columna $j'$.**

$$\left\|f_I^j - f_I^{j'}\right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_I^j - f_I^{j'}\right)^2}{f_i}$$

**1.9. Sean $j$ y $j'$ dos modalidades. Expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$ el producto escalar** $< \left(f_I^{j'} - f_I^j\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I} = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^{j'} - f_i^j\right)\left(f_i - f_i^j\right)}{f_i}$.

**Estudiar el signo de este producto escalar.**

**1.10. Expresar en función de, $\left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2$ y $< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$ y el producto escalar, $< \left(f_I^{j'} - f_I^j\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I}$.**

## 2.2. Resolución del problema

**2.2.1.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de $P_j$ el cuadrado de la distancia, según la métrica del $\mathcal{X}^2$ de centro $f_I$, entre el perfil $f_I^j$ de la columna $j$ y el perfil medio $f_I$ es la siguiente,

$$\left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)^2}{f}.$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$f_i = \frac{k(i)}{k}$$

$$f_i^j = \frac{k(i,\ j)}{k(j)}$$

$$\sum_{i \in I} f_i = \sum_{i \in I} \frac{k(i)}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i \in I} k(i) = \frac{1}{k}\ k = 1$$

$$\sum_{i \in I} f_i^j = \sum_{i \in I} \frac{k(i,\ j)}{k(j)} = \frac{1}{k(j)} \sum_{i \in I} k(i,\ j) = \frac{1}{k(j)}\ k(j) = 1$$

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} = N \sum_{i \in I} \left(\frac{k(i,\ j)}{k(j)}\right)^2$$

$$\sum_{i \in I} \left[k(i,\ j)\right]^2 = k(j)$$

$$k(j) = NP_j$$

llegamos —sin dificultad- a la expresión, $\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1 - P_j}{P_j}$ tal como mostramos a continuación,

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)}{f_i} = \sum_{i \in I} \left[ \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} - 2 f_i^j + f_i \right] =$$

$$= \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} - 2 \sum_{i \in I} f_i^j + \sum_{i \in I} f_i = N \sum_{i \in I} \left(\frac{k(i,\ j)}{k(j)}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{N}{[k(j)]^2} \sum_{i \in I} [k(i,j)]^2 - 1 = \frac{N}{[k(j)]^2} k(j) - 1 =$$

$$\frac{N}{k(j)} - 1 = \frac{N}{NP_j} - 1 = \frac{1}{P_j} - 1 = \frac{1 - P_j}{P_j}$$

Por lo tanto, $\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \dfrac{1 - P_j}{P_j}$

**2.2.2.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de $P_j$ y *Card Q* la contribución absoluta de $j$ a la inercia de la nube *N(J)* es la siguiente:

$$f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = f_j \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)^2}{f_i}.$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$f_j = \frac{P_j}{Card\, Q}, \; \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_i}^2 = \frac{1 - P_j}{P_j}$$

llegamos —sin dificultad— a la expresión, $f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \dfrac{1 - P_j}{Card\, Q}$ tal como mostramos a continuación,

$$f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{P_j}{Card\, Q} \frac{\left(1 - P_j\right)}{P_j} = \frac{\left(1 - P_j\right)}{Card\, Q}$$

Por lo tanto: $f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \dfrac{\left(1 - P_j\right)}{Card\, Q}$

**2.2.3.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresaren función de *Card* $J_q$ y de *Card Q,* la suma de las contribuciones de las modalidades de la cuestión $q$ a la inercia de la nube *N(J)* es la siguiente:

$$\sum_{j \in J_q} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{j \in J_q} \sum_{i \in I} \frac{f_j \left(f_i^j - f_i\right)^2}{f_i}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta el siguiente resultado, $f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{(1-P_j)}{Card\ Q}$, llegamos —sin dificultad— a la expresión,

$$\sum_{j \in J_q} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{(Card\ J_q - 1)}{Card\ Q}$$

tal como mostramos a continuación,

$$\sum_{j \in J_q} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{j \in J_q} \frac{(1-P_j)}{Card\ Q} = \frac{(Card\ J_q - 1)}{Card\ Q}$$

Por lo tanto, $\sum_{j \in J_q} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{(Card\ J_q - 1)}{Card\ Q}$

A la vista de este resultado concluimos que la suma de las contribuciones aportadas por las modalidades correspondientes a una cuestión depende de $Card\ J_q$ y de $Card\ Q$

**2.2.4.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar el valor de la inercia total de la nube *N(J)* en función de *Card J* y de *Card Q* es la siguiente:

$$\sum_{q \in Q} \frac{(Card\ J_q - 1)}{Card\ Q}$$

Operando convenientemente llegamos —sin dificultad— al resultado final tal como mostramos a continuación,

$$\sum_{q \in Q} \frac{(Card\ J_q - 1)}{Card\ Q} = \frac{(Card\ J - Card\ Q)}{Card\ Q} = \frac{Card\ J}{Card\ Q} - 1$$

Esta fórmula representa la suma de todos los valores propios (la traza); es decir, la inercia total de la nube. El valor de la inercia es un indicador de la dispersión de la nube. La traza es, pues, el número medio de modalidades por cuestión menos 1.

De lo que se desprende que la inercia de la nube *N(J)* será mínima en el caso en que todas las cuestiones se presenten a dos modalidades *Card J = 2 Card Q* y, por lo tanto, *CTj = 1*

**2.2.5.** La fórmula de partida que va a permitirnos poner de manifiesto que, la inercia total de la nube de puntos es igual a la inercia de la nube *N(J)* y, esta a su vez igual a la inercia de la nube *N(I)* es:

$$\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|^2_{f_I \times f_J} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{\left( f_{ij} - f_i f_j \right)^2}{f_i f_j}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta el siguiente resultado, $f_i^j = \dfrac{f_{ij}}{f_j}$ llegamos —sin dificultad— a la expresión, $\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|^2_{f_I \times f_J} = \sum_{j \in J} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|^2_{f_I}$ tal como mostramos a continuación,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{\left( f_{ij} - f_i f_j \right)^2}{f_i f_j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{\left( f_i^j f_j - f_i f_j \right)^2}{f_i f_j} =$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{f_j^2 \left( f_i^j - f_i \right)^2}{f_i f_j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{f_j \left( f_i^j - f_i \right)^2}{f_i} = \sum_{j \in J} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|^2_{f_I}$$

Por lo tanto: $\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|^2_{f_I \times f_J} = \sum_{j \varepsilon J} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|^2_{f_I}$

Si ahora, a lo largo del desarrollo del segundo miembro tenemos en cuenta el siguiente resultado, $f_j^i = \dfrac{f_{ij}}{f_i}$ llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión,

$$\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|^2_{f_I \times f_J} = \sum_{i \in I} f_i \left\| f_J^i - f_J \right\|^2_{f_J}$$

De lo que se desprende que se verifica la siguiente igualdad,

$$\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|^2_{f_I \times f_J} = \sum_{j \in J} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|^2_{f_J} = \sum_{i \in I} f_i \left\| f_J^i - f_I \right\|^2_{f_J}$$

Esta expresión pone de manifiesto que la inercia total de la nube de puntos es igual a la inercia de la nube *N(J)* e igual, a su vez, a la inercia de la nube *N(I)*.

**2.2.6.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$, el cuadrado de la distancia, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I$, entre el perfil $f_I^j$ y perfil $f_I^{j'}$ es la siguiente, $\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_I^j - f_I^{j'}\right)^2}{f_i}$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados.

$$f_i^j = \frac{k(i,j)}{k(j)},\ f_i^{j'} = \frac{k(i,j')}{k(j')}$$

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} = N \sum_{i \in I} \left[\frac{k(i,j)}{k(j)}\right]^2 = \frac{N\, k(j)}{N^2 P_j^2} = \frac{N\left(N P_j\right)}{N^2 P_j^2} = \frac{1}{P_j}$$

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^{j'}\right)^2}{f_i} = N \sum_{i \in I} \left[\frac{k(i,j')}{k(j')}\right]^2 = \frac{N\, k(j')}{N^2 P_{j'}^2} = \frac{N\left(N P_{j'}\right)}{N^2 P_{j'}^2} = \frac{1}{P_{j'}}$$

$$\sum_{i \in I} \frac{f_i^j f_i^{j'}}{f_i} = N \sum_{i \in I} \left[\frac{k(i,j)\, k(i,j')}{k(j)\, k(j')}\right] = \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$$

llegamos —sin dificultad— a la expresión, $\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j} + \frac{1}{P_{j'}} - \frac{2P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$

tal como mostramos a continuación,

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i^{j'}\right)^2}{f_i} =$$

$$= \sum_{i \in I} \left[\frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} - 2\,\frac{f_i^j f_i^{j'}}{f_i} + \frac{\left(f_i^{j'}\right)}{f_i}\right] = \frac{1}{P_j} + \frac{1}{P_{j'}} - 2\,\frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$$

Por lo tanto, $\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \dfrac{1}{P_j} + \dfrac{1}{P_{j'}} - 2\, \dfrac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}}$

**2.2.7.** La formula de partida que va a permitirnos expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$, el producto escalar $< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$ es:

$$< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)\left(f_i^{j'} - f_i\right)}{f_i}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$\sum_{i \in I} f_i^j = 1, \quad \sum_{i \in I} f_i^{j'} = 1, \quad \sum_{i \in I} \frac{f_i^j f_i^{j'}}{f_i} = \frac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}}$$

llegamos —sin dificultad— a la expresión,

$$< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} - 1$$

tal como mostramos a continuación:

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)\left(f_i^{j'} - f_i\right)}{f_i} = \sum_{i \in I} \left[ \frac{f_i^j f_i^{j'}}{f_i} - f_i^j - f_i^{j'} + f_i \right] =$$

$$= \sum_{i \in I} \frac{f_i^j f_i^{j'}}{f_i} - \sum_{i \in I} f_i^j - \sum_{i \in I} f_i^{j'} + \sum_{i \in I} f_i = \frac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} - 1$$

Por lo tanto: $< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \dfrac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} - 1$

**2.2.8.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de, $\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2$, $\left\| f_I^{j'} - f_I \right\|_{f_I}^2$ y $< \left(f_I^j - f_I\right) \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$ la distancia al cuadrado, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I$, entre el perfil medio $f_I^j$ y el perfil medio $f_I^{j'}$ es la siguiente:

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i \in I} \frac{\left( f_i^j - f_i^{j'} \right)^2}{f_i}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j} - 1, \ \left\| f_I^{j'} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_{j'}} - 1$$

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j} + \frac{1}{P_{j'}} - 2 \frac{P_{jj'}}{P_j P_j}$$

$$< \left( f_I^j - f_I \right), \left( f_I^{j'} - f_I \right) >_{f_I} = \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}} - 1$$

llegamos sin dificultad, a la siguiente expresión:

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 + \left\| f_I^{j'} - f_I \right\|_{f_I}^2 - 2 < \left( f_I^j - f_I \right), \left( f_I^{j'} - f_I \right) >_{f_I}$$

tal como mostramos a continuación:

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j} + \frac{1}{P_{j'}} - 2 \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}} =$$

$$= \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 + \left\| f_I^{j'} - f_I \right\|_{f_I}^2 - 2 < \left( f_I^j - f_I \right), \left( f_I^{j'} - f_I \right) >_{f_I}$$

Por lo tanto:

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 + \left\| f_I^{j'} - f_I \right\|_{f_I}^2 - 2 < \left( f_I^j - f_I \right), \left( f_I^{j'} - f_I \right) >_{f_I}$$

**2.2.9**. La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de $P_j$, $P_{j'}$ y $P_{jj'}$, el producto escalar $< \left( f_I^{j'} - f_I^j \right), \left( f_I - f_I^j \right) >_{f_I}$ es la siguiente:

$$< \left( f_I^{j'} - f_I^j \right), \left( f_I - f_I^j \right) >_{f_I} = \sum_{i \in I} \frac{\left( f_i^{j'} - f_i^j \right) \left( f_i - f_i^j \right)}{f_i}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$\sum_{i \in I} f_i^j = 1, \sum_{i \in I} f_i^{j'} = 1$$

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j\right)}{f_i} = \frac{1}{P_j}$$

$$\sum_{i \in I} \frac{f_i^{j'} f_i^j}{f_i} = \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$$

llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión:

$$< \left(f_i^{j'} - f_i^j\right), \left(f_I - f_I^i\right) >_{f_I} = \frac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$$

tal como mostramos a continuación:

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^{j'} - f_i^j\right)\left(f_i - f_i^j\right)}{f_i} = \sum_{i \in I} \left[ \frac{f_i^{j'} f_i}{f_i} - \frac{f_i^{j'} f_i^j}{f_i} - \frac{f_i^j f_i}{f_i} + \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} \right] =$$

$$= \sum_{i \in I} f_i^{j'} - \sum_{i \in I} \frac{f_i^{j'} f_i^j}{f_i} - \sum_{i \in I} f_i^j - \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i} =$$

$$= 1 - \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}} - 1 + \frac{1}{P_j} = \frac{1}{P_j} - \frac{P_{jj'}}{P_j P_{j'}} = \frac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$$

Por lo tanto, $< \left(f_i^{j'} - f_i^j\right), \left(f_I - f_I^i\right) >_{f_I} = \dfrac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$

De esta fórmula se desprende que el signo del producto escalar es positivo por el simple hecho de que $P_{jj'}$ no puede alcanzar un valor superior a $P_{j'}$

**2.2.10.** La fórmula de partida que va a permitirnos expresar en función de, $\left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2$ y $< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$ el producto escalar $< \left(f_I^{j'} - f_I\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I}$ es la siguiente,

$$< \left(f_I^{j'} - f_I^j\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I} = \sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^{j'} - f_i^j\right)\left(f_i - f_i^j\right)}{f_i}$$

Partiendo del segundo miembro de esta fórmula y teniendo en cuenta los siguientes resultados,

$$\left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j}$$

$$< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} - 1$$

$$< \left(f_I^{j'} - f_I^j\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I} = \frac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}}$$

llegamos —sin dificultad— a la siguiente expresión,

$$< \left(f_I^{j'} - f_I\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I} = \left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 - < \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$$

tal como mostramos a continuación,

$$\sum_{i \in I} \frac{\left(f_i^{j'} - f_i^j\right)\left(f_i - f_i^j\right)}{f_i} = \frac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} = \frac{1}{P_j} - \frac{P_{jj'}}{P_j\, P_{j'}} =$$
$$= \left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 - < \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$$

Por lo tanto:

$$< \left(f_I^{j'} - f_I\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I} = \left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 - < \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$$

### 2.3. Ejercicio numérico

Un cuestionario está formado de un conjunto $Q$ de cuestiones, cada una de las cuales admite un conjunto $J_q$ de modalidades de respuesta.

Indicaremos por $J = \cup \left\{ J_q \middle| q \in Q \right\}$ el conjunto de modalidades de respuesta a todas las cuestiones de $Q$.

Ejemplo:

$$Q = \{ q_1, q_2, q_3 \}$$

$q_1$: Donde compra normalmente el vino?

| | |
|---|---|
| • En tienda especializada | CT —> 1 |
| • Supermercado | CS —> 2 |

$q_2$: ¿Que clase de vino prefiere Ud.?

| | |
|---|---|
| • Tinto | PT —> 1 |
| • Rosado | PR —> 2 |
| • Blanco | PB —> 3 |

$q_3$: ¿Que tipo de sabor prefiere Ud en el vino?

| | |
|---|---|
| • Joven | SJ —> 1 |
| • Viejo | SV —> 2 |
| • Semiseco | SE —> 3 |
| • Seco | SC —> 4 |

$$J_{q_1} = \{ CT, CS \} \quad J_{q_2} = \{ PT, PR, PB \} \quad J_{q_3} = \{ SJ, SV, SE, SC \}$$

$$Card\ J_{q_1} = 2 \quad Card\ J_{q_2} = 3 \quad Card\ J_{q_3} = 4$$

$$J = \{ CT, CS, PT, PR, PB, SJ, SV, SE, SC \}$$

$$Card\ J = 9$$

| | Tabla disyuntiva completa: $k_{IJ}$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Compra** | | **Prefiere** | | | **Sabor** | | | |
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| I01 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| I02 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| I03 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| I04 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Calcular los siguientes apartados:

**1.** $\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2$

**2.** $f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2$

**3.** $\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2$

**4.** $< \left(f_I^j - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I}$

**5.** $< \left(f_I^{j'} - f_I^j\right), \left(f_I - f_I^j\right) >_{f_I}$

**1.** Partiendo de la siguiente fórmula $\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{P_j} - 1$ obtenemos los resultados que mostramos a continuación:

$$\left\| f_I^{CT} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3, \quad \left\| f_I^{CS} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{1}{3},$$

$$\left\| f_I^{PT} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3$$

$$\left\| f_I^{PR} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} - 1 = 1, \quad \left\| f_I^{PB} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3,$$

$$\left\| f_I^{SJ} - f_I \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3$$

$$\left\|f_I^{SV} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3, \quad \left\|f_I^{SE} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3,$$

$$\left\|f_I^{SC} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = 3.$$

**2.** Partiendo de la siguiente fórmula, $f_j \left\|f_I^j - f_I\right\|_{f_I}^2 = \dfrac{1 - P_j}{Card\ Q}$ obtenemos los resultados que mostramos a continuación:

$$f_{CT}\left\|f_I^{CT} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}, \quad f_{CS}\left\|f_I^{CS} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$

$$f_{PT}\left\|f_I^{PT} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}, \quad f_{PR}\left\|f_I^{PR} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{2}{4}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f_{PB}\left\|f_I^{PB} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}, \quad f_{SJ}\left\|f_I^{SJ} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

$$f_{SV}\left\|f_I^{SV} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}, \quad f_{SE}\left\|f_I^{SE} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

$$f_{SC}\left\|f_I^{SC} - f_I\right\|_{f_I}^2 = \frac{1-\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

**3.** Partiendo de la siguiente fórmula, $\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \dfrac{1}{P_j} + \dfrac{1}{P_j} - 2\,\dfrac{P_{jj'}}{P_j\,P_{j'}}$ obtenemos los resultados que mostramos a continuación:

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{CS} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4}} - 0 = \frac{16}{3}$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{PT} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{PR} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\,\frac{2}{4}} = 4 + 2 - 4 = 2$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{PB} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{SJ} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{SV} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{SE} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\| f_I^{CT} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{PT}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{PR}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{2}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} = 2$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{PB}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{SJ}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{SV}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{SE}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left\|f_I^{CS} - f_I^{SC}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{PR}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 0 = 4 + 2 = 6$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{PB}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{SJ}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{SV}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{SE}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$\left\|f_I^{PT} - f_I^{SC}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} - 0 = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|f_I^{PR} - f_I^{PB}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 2 + 4 = 6$$

$$\left\|f_I^{PR} - f_I^{SJ}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}\,\frac{1}{4}} = 2 + 4 - 4 = 2$$

$$\left\|f_I^{PR} - f_I^{SV}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 6$$

$$\left\|f_I^{PR} - f_I^{SE}\right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 6$$

$$\left\| f_I^{PR} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}\,\frac{1}{4}} = 2 + 4 - 4 = 2$$

$$\left\| f_I^{PB} - f_I^{SJ} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{PB} - f_I^{SV} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}} = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$\left\| f_I^{PB} - f_I^{SE} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{PB} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SJ} - f_I^{SV} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SJ} - f_I^{SE} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SJ} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SV} - f_I^{SE} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SV} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

$$\left\| f_I^{SE} - f_I^{SC} \right\|_{f_I}^2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - 0 = 8$$

| | **Matriz de distancias al cuadrado, según la métrica del $\chi^2$ de centro $f_I$, entre el perfil $f_I^j$ y el perfil $f_I^{j'}$** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **CT** | **CS** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| CT | 0 | 16/3 | 8 | 2 | 8 | 0 | 8 | 8 | 8 |
| CS | | 0 | 8/3 | 2 | 8/3 | 8/3 | 8/3 | 8/3 | 8/3 |
| PT | | | 0 | 6 | 8 | 8 | 8 | 0 | 8 |
| PR | | | | 0 | 6 | 2 | 6 | 6 | 2 |
| PB | | | | | 0 | 8 | 0 | 8 | 8 |
| SJ | | | | | | 0 | 8 | 8 | 8 |
| SV | | | | | | | 0 | 8 | 8 |
| SE | | | | | | | | 0 | 8 |
| SC | | | | | | | | | 0 |

**4.** Partiendo de la siguiente fórmula, $< \left(f_I^{j} - f_I\right), \left(f_I^{j'} - f_I\right) >_{f_I} = \dfrac{P_{jj'}}{P_J\, P_{j'}} - 1$ obtenemos los resultados que mostramos a continuación:

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{CT} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{PT} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{PR} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{PB} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{SJ} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{SV} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{SE} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CS} - f_I\right), \left(f_I^{SC} - f_I\right) >_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{CT} - f_I\right), \left(f_I^{PT} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$< \left(f_I^{CT} - f_I\right), \left(f_I^{PR} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\ \frac{2}{4}} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$< \left(f_I^{PR} - f_I\right)\left(f_I^{SJ} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}\ \frac{1}{4}} - 1 = 2-1 = 1$$

$$< \left(f_I^{PR} - f_I\right)\left(f_I^{SV} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{PR} - f_I\right)\left(f_I^{SE} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{PR} - f_I\right)\left(f_I^{SC} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}\ \frac{1}{4}} - 1 = 2-1 = 1$$

$$< \left(f_I^{PB} - f_I\right)\left(f_I^{SJ} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{PB} - f_I\right)\left(f_I^{SV} - f_I\right) >_{f_I} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}} - 1 = 4-1 = 3$$

$$< \left(f_I^{PB} - f_I\right)\left(f_I^{SE} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{PB} - f_I\right)\left(f_I^{SC} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SJ} - f_I\right)\left(f_I^{SV} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SJ} - f_I\right)\left(f_I^{SE} - f_I\right) >_{f_I} = 0-1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SJ} - f_I\right)\left(f_I^{SC} - f_I\right)>_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SV} - f_I\right)\left(f_I^{SE} - f_I\right)>_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SV} - f_I\right)\left(f_I^{SC} - f_I\right)>_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

$$< \left(f_I^{SE} - f_I\right)\left(f_I^{SC} - f_I\right)>_{f_I} = 0 - 1 = -1$$

| | **Matriz de productos escalares** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| SC | | -1 | -1 | 1 | -1 | 3 | -1 | -1 | -1 |
| CT | | | 1/3 | -1/3 | 1/3 | -1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 |
| PT | | | | -1 | -1 | -1 | -1 | 3 | -1 |
| PR | | | | | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| PB | | | | | | -1 | 3 | -1 | -1 |
| SJ | | | | | | | -1 | -1 | -1 |
| SV | | | | | | | | -1 | -1 |
| SE | | | | | | | | | -1 |
| SC | | | | | | | | | |

**5.** Partiendo de la siguiente fórmula, $<\left(f_I^{j'} - f_I^{j}\right),\left(f_I - f_I^{j}\right)>_{f_I} = \dfrac{P_{j'} - P_{jj'}}{P_j P_{j'}}$ estamos en condiciones de construir sin dificultad, la siguiente matriz,

| | **Matriz de productos escalares** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **CS** | **CT** | **PT** | **PR** | **PB** | **SJ** | **SV** | **SE** | **SC** |
| SC | | 4 | 4 | 2 | 4 | 0 | 4 | 4 | 4 |
| CT | | | 0 | 2/3 | 0 | 4/3 | 0 | 0 | 0 |
| PT | | | | 4 | 4 | 4 | 4 | 0 | 4 |
| PR | | | | | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| PB | | | | | | 4 | 0 | 4 | 4 |
| SJ | | | | | | | 4 | 4 | 4 |
| SV | | | | | | | | 4 | 4 |
| SE | | | | | | | | | 4 |
| SC | | | | | | | | | |

## BIBLIOGRAFÍA


BASTIN Ch. (1977): Exercices d'application du cours d'Analyse Factorielle. Niveau 1. L'ecole d'été du CNRS sur L'Analyse des Données, 19-30 Septembre.

BENZÉCRI, J. P. (1973): L'Analyse des Données. Tome 2. L'Analyse des Correspondances. Dunod.

BENZÉCRI, J. P. & colaborateurs (1981): Pratique de l'Analyse des Données. Linguistique & Lexicologie. Dunod.

CAILLIEZ, F.; PAGES, J. P. (1976): Introduction à l'Analyse des Données. Smash.

CÉHESSAT, R. (1976): Exercices commentés de statistique et informatique appliquées.Dunod

CHEVALIER, A.; MORICE, V.; NAKACHE, J. P. (1981): Exercices commentés de mathématiques pour l'analyse statistique des données. Dunod

ESCOFIER, B.; PAGÈS, J. (1988): Analyse Factorielle Simples et Multiples. Objectifs, méthodes et interpretation. Dunod.

ESCOUFIER, Y. (1979): Cours d'Analyse des Données. RT 7901. CRIG. Montpellier.

ESCOUFIER, Y. (1982): "L'Analyse des Correspondances Simples et Multiples". Metron, 1-2, p 53-78.

ESCOUFIER, Y. (1985): L´Analyse des Correspondances, ses Propriétés, et Extension. Bull of the Int. Statist. Inst,4,28-2.

GREENACRE, M. J. (1984): Theory and application of correspondance analysis. London, Academic Press.

JAMBU, M. (1989): Exploration Informatique et Statistique des Données. Dunod Informatique.

LEBART, L.; MORINEAU, A.; PIRON, M. (1995): Statistique Exploratoire Multidimensionnelle. Dunod.

MALECOT, J. F. (1980): Le traitement des données: exposecritique des resultats en analyse des données (l'exemple de l'analyse des correspondances). Cahiers "Methodologie de la Recherche en Marketing". Lille, 236-295.

ROUX, M. (1977): Le codage des données en vues de l'Analyse Factorielle des Correspondances. L'ecole d'été du CNRS sur l'Analyse des Données. 19-30 Septembre.

# FE DE ERRATAS

Debe decir:

- Página 9, punto 1.2.7.

… masa …

- Página 12, punto 3

Tabla $f_I^J$ de los perfiles de las columnas $k_{IJ}$

- Página 16, punto 4

$$f_{I01}=\frac{1}{4} \quad f_{I02}=\frac{1}{4} \quad f_{I03}=\frac{1}{4} \quad f_{I04}=\frac{1}{4}$$

- Página 19, punto 1.8.

$$\left\| f_I^j - f_I^{j'} \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i\in I} \frac{\left(f_I^j - f_I^{j'}\right)^2}{f_i}$$

- Página 19, punto 2.2.1.

$$\left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i\in I} \frac{\left(f_i^j - f_i\right)^2}{f_i}$$

- Página 21, 2.2.3.

… expresar en …

- Página 23, punto 2.2.5.

$$\left\| f_{IJ} - f_I \times f_J \right\|_{f_I \times f_J}^2 = \sum_{j\in J} f_j \left\| f_I^j - f_I \right\|_{f_I}^2 = \sum_{i\in I} f_i \left\| f_J^i - f_J \right\|_{f_J}^2$$

- Página 27, fórmula 2ª

$$\sum_{i\in I}\frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i}=\frac{1}{P_j}$$

- Página 27, fórmula 4ª

$$<\left(f_I^{j'}\text{-}f_I^j\right),\left(f_I\text{-}f_I^i\right)>_{f_I}=\frac{P_{j'}\text{ - }P_{jj'}}{P_j\,P_{j'}}$$

- Página 27, fórmula 6ª

$$=\sum_{i\in I}f_i^{j'}\text{ - }\sum_{i\in I}\frac{f_i^{j'}\,f_i^j}{f_i}\text{ - }\sum_{i\in I}f_i^j+\sum_{i\in I}\frac{\left(f_i^j\right)^2}{f_i}=$$

- Página 27, fórmula 8ª

$$<\left(f_I^{j'}\text{-}f_I^j\right),\left(f_I\text{-}f_I^i\right)>_{f_I}=\frac{P_{j'}\text{ - }P_{jj'}}{P_j\,P_{j'}}$$

- Página 39, tabla - primera columna

CS

- Página 40, tabla - primera columna

CS